В. А. СУРОВЦЕВ

Б. Рассел о бесконечности

Характерной особенностью логистической системы «Principia Mathematica» А. Уайтхеда и Б. Рассела является наличие в ней аксиомы бесконечности, которая утверждает, что любому индуктивному кардиналу *n* соответствует класс, содержащий *n* членов, где под индуктивными кардиналами понимаются все числа натурального ряда, являющиеся последующими элементами 0, и каждый последующий индуктивный кардинал получается прибавлением 1 к предыдущему индуктивному кардиналу. Из аксиомы бесконечности, в частности, следует, что общее число членов, образующих классы, превосходит любой индуктивный кардинал, поскольку для любого заданного индуктивного кардинального числа *n* можно получить индуктивный кардинал $n+1$, а значит, существует класс с $n+1$ членами и число членов не может ограничиваться *n*. Таким образом, аксиома бесконечности утверждает, что имеется по крайней мере столько же элементов, являющихся членами классов, сколько имеется чисел в натуральном ряду, а именно, $\aleph_0$, т. е. общее число таких элементов само не является индуктивным кардиналом.

Введение этой аксиомы мотивировано некоторыми особенностями, принимаемыми в «Principia Mathematica» определением кардинальных чисел и аксиоматизацией арифметики, предложенной Дж. Пеано. Согласно определению кардинальных чисел, каждое из них представляет собой класс всех подобных классов, т. е. таких классов, члены которых находятся во взаимно-однозначном соответствии, или равночисленных классов. Если взять индуктивные кардиналы, то, в частности, 0 определяется как класс всех классов, подобных $\emptyset$, а индуктивный кардинал *k* (где $k > 0$) есть класс всех таких классов, которые содержат ровно *k* членов, которые также можно поставить во взаимнооднозначное соответствие. При этом понятие подобия (равночисленности или взаимно-однозначного соответствия) более фундаментально, чем понятие кардинального числа, поскольку подобие можно установить, не обращаясь к понятию числа (т. е. к вопросу «сколько?»). Так, всегда можно решить вопрос, равночисленны ли классы *{a, b, c ...}* и *{a', b', c' ...}* или же нет, поставив их во взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, понятие классов, находящихся во взаимно-однозначном соответствии, более фундаментально, чем понятие числа. Наоборот, понятие числа производно от понятия равночисленных классов.

Обратимся к индуктивным кардинальным числам. Представим, что члены, входящие в классы, ограничены, например, количеством m. Тогда индуктивные кардинальные числа также ограничены, поскольку максимальный индуктивный кардинал будет определяться как класс всех m-равночисленных классов. Если же взять любой индуктивный кардинал n больший m (т. е. $n > m$), то он будет равен 0, поскольку нет никаких классов, классом классов которых он бы являлся. Это означает, что при ограниченности членов, которые могут составлять классы, ограничены также и индуктивные кардиналы. Если количество членов, которые могут составлять классы, ограничены m, равными 0 становятся n, n+1, n+1+1 и т. д. (где $n = m+1$, $n+1 = m+1+1$ и т. д.). То есть любое построение, основанное на принципе индукции, становится бессмысленным.

Однако такое представление противоречит аксиоматизации арифметики, предложенной Дж. Пеано. Согласно этой аксиоматизации два различных индуктивных кардинала не могут иметь один и тот же последующий элемент, т. е. если $m+1 = n+1$. то $m = n$. Но при ограничении количества членов, образующих классы, как раз и получается ситуация, при которой это условие не выполняется. Действительно, если количество членов класса ограничено m, то m+1, а также и n+1 (при любом n, которое больше m) будет равно 0. А отсюда не будут выполняться интуитивно очевидные арифметические операции с индуктивными кардиналами, вытекающими из аксиоматики Дж. Пеано, вроде сложения, поскольку тогда $m+1 =$ $= n+1$ (при любом $m > 0$, $m \neq n$ и $n > m$).

Таким образом, предположение об ограниченности количества членов, образующих классы, приводит к тому, что обычная арифметика оказывается невозможной в том смысле, что обычные операции не приводят к ожидаемому результату, поскольку, например, любое сложение $m + n$ должно приводить к 0, если индуктивные кардиналы m или n превосходят количество имеющихся членов возможных классов. Поэтому если мы принимаем обычные арифметические операции, необходимо принять и *АБ,* а вместе с ней и необходимость принять бесконечность членов, из которых могут быть образованы классы.

Аксиома бесконечности вводит в математику идею бесконечности, и против этого нечего возразить. Действительно, без предположения бесконечности была бы невозможна математика в том виде, в котором она принимается в системе «Principia Mathematica». Математика без идеи бесконечности ничего не стоит, и аксиома бесконечности должна восполнить то, чего ей бы недоставало. Но приведённые выше аргументы ограничиваются лишь формальной стороной, формальной в том смысле, что без аксиомы бесконечности были бы невозможны многие построения «Principia Mathematica». Иначе зачем было бы принимать её в качестве аксиомы? Однако то, как введение этой аксиомы в ряде случаев интерпретирует Рассел, порождает некоторые содержательные проблемы, касающиеся как её понимания, так и её формулировки. Эти проблемы затрагивают два типа вопросов. Первый из них касается самой идеи бесконечности, второй — характера аксиомы, посредством которой она вводится. Вопросы первого типа сводятся к следующему:

1. Разве идею бесконечности нельзя ввести, основываясь на априорных основаниях, доказывая её необходимость на базе более фундаментальных, исходных понятий? В этом случае идея бесконечности оказалась бы производной и, следовательно, не требовала бы особого, принимаемого без доказательств положения. И здесь возможны два варианта:

1(a). Выводима ли эта идея сугубо аналитически, т. е. является ли она производной таких понятий, необходимость которых обоснована через закон недопущения противоречия?

Или же

1(b). Эта идея основана на содержании понятий, представляющихся самоочевидными, и, следовательно, идею бесконечности можно основать на принципах, доказательность которых должна казаться столь же очевидной, как и очевидность содержания самих этих исходных понятий?

2. Если идею бесконечности нельзя обосновать априорно, быть может, её можно обосновать *a posteriori*, основываясь на опыте? В этом случае содержание мира должно было бы показать, что идея бесконечности есть следствие здравого смысла, основанного на восприятии и индукции.

Второй тип вопросов касается природы утверждения, т. е. аксиомы бесконечности, посредством которого вводится бесконечность.

3. Если идею бесконечности нельзя обосновать, то что представляет собой принимаемое без доказательства утверждение о её существовании? Принимается ли аксиома бесконечности в силу своего содержания, т. е. именно её содержание служит основанием выводимых из неё следствий, или же основанием служит её форма, согласно которой аксиому бесконечности можно классифицировать как предложение логики, т. е. предложение, принимаемое просто в силу формы, которую в конечном счёте обнаруживает совокупность предложений независимо от своего содержания? Должны ли мы принимать аксиому беско-

нечности как утверждение о содержании мира или же как утверждение о структуре описания, в которой мир может быть представлен? Должна ли аксиома бесконечности рассматриваться как истина априорная и логическая или же как апостериорная и эмпирическая?

Обращаясь к вопросам первого типа, предполагающим аналитический характер идеи бесконечности, прежде всего, стоит указать на аргументацию, производную от способа введения чисел, предложенного Г. Фреге, от которой в определённой степени зависит способ введения числа в системе «Principia Mathematica». В данном случае число предлагается рассматривать как общее свойство произвольных классов (при этом само данное общее свойство задаёт класс), между членами которых можно установить взаимно-однозначное соответствие. Так, если имеется класс *{a, b, c ...}* и класс *{α, β, γ ...}*, где *a, b, c..., α, β, γ ...* — элементы произвольной природы, то эти классы имеют одно и то же число, если мы можем взаимно-однозначно сопоставить их члены, скажем так: *a* с *α*, *b* с *β*, *c* с *γ* и т. д., и при этом не окажется таких элементов из одного из этих классов, который не был бы сопоставлен одному и только одному из элементов другого из этих классов. Этот подход нетрудно распространить на классы со сколь угодно большим количеством элементов.

Этот подход ещё не даёт понятия конкретных чисел, он даёт только понятие равночисленности классов. Для того чтобы получить понятия конкретных чисел, нужно указать способ установления равночисленности. Для этого необходимо выделить некоторый класс, равночисленности с которым, т. е. взаимно-однозначное соответствие с его элементами элементов другого класса, будет давать один и тот же результат. Такой класс нетрудно найти для 0. Этот класс должен содержать пустое множество членов, т. е. ∅, и его можно задать посредством функции *xx,* поскольку элементов, выполняющих данную функцию, нет. Далее, раз у нас есть ∅, мы можем образовать класс, состоящий из этого элемента, т. е. {∅}, и этот класс задаёт число, которое соответствует всем тем классам, которые ему равночисленны, а именно число 1. Из уже имеющихся элементов ∅ и {∅} образуется следующий класс: {∅, {∅}}, где помимо ∅ в качестве члена содержится класс, образованный из ∅, т. е. {∅}, а класс всех тех классов, которые находятся с {∅, {∅}}, во взаимнооднозначном соответствии образует число 2. Этот процесс нетрудно продолжить, и в результате мы получаем ряд классов классов, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с ∅, {∅}, {∅, {∅}}, {∅, {∅}, {∅, {∅}}} ... и т. д. Таким образом, мы получаем ряд натуральных чисел, возрастающих бесконечно вместе с возрастанием классов, поскольку каждое предшествующее кардинальное число содержится в каждом последующем в качестве подкласса. При таком построении класс всех натуральных чисел был бы равен N_0 и *АБ* не понадобилась бы.

Кроме того, аргументация первого типа, предполагающая аналитический характер идеи бесконечности, может основываться на известной теореме Г. Кантора, согласно которой если задан класс с n членами, то можно образовать класс подклассов заданного класса, членов которого будет 2», что больше членов, содержащихся в n. Например, пусть изначальный класс будет пустым, т. е. Ø, тогда членов класса, образованного из исходного, будет 1, поскольку 2^0 будет 1, а именно {Ø}. Далее, пусть $n = 1$, тогда 2^1 будет 2, а именно {Ø,{Ø}}. Затем, если $n = 2$, то {Ø,{Ø},{{Ø}},{Ø,{Ø}}}, и т. д. Классы, полученные таким образом, можно объединять, при этом, в силу свойств операции объединения, лишние члены объединения будут сокращаться, и объединением подобных классов можно получать класс членов, с которым некоторые классы будут находиться во взаимно-однозначном соответствии. Поскольку n — произвольно, произвольно и 2^n, и, таким образом, можно получать любые равночисленные классы. Если же классы равночисленных классов мы определяем как натуральные числа, то мы получаем и все натуральные числа. И класс всех этих классов был бы также равен N_0 и *АБ* не понадобилась бы.

Несмотря на привлекательность подобных способов введения идеи бесконечности в формальную структуру, основанных исключительно на аналитических методах, они тем не менее не обоснованы, поскольку содержат противоречия. Одно из таких противоречий обнаружил уже сам Г. Кантор. Это противоречие касается класса всех классов. Пусть таким классом будет £.

Согласно вышеуказанной теореме, этот класс будет содержать такое количество членов, которое должно превосходить любое количество членов у содержащихся в нём элементов. Но согласно этой же теореме класс $2^{£}$ будет содержать членов больше чем £. Однако согласно определению £ как класса всех классов £ содержит класс с $2^{£}$ членами в качестве элемента.

Исследуя возможность решения данной проблемы, Рассел обнаружил ещё одно противоречие, так называемый парадокс Рассела, который более фундаментален, поскольку не зависит от теоремы Кантора. Парадокс Кантора получается постольку, поскольку предполагается, что класс £ содержит класс с $2^{£}$ членами в качестве элемента. Но предположим более общую ситуацию. Для начала разделим все классы на те, которые содержат сами себя в качестве членов, и те, которые не содержат сами себя в качестве членов. Пусть теперь £ будет классом всех тех классов, которые не содержат сами себя в качестве членов. Тогда ответ на вопрос о том, к каким классам, к тем, которые содержат сами себя в качестве членов, или к тем, которые не содержат сами себя в качестве членов, относится сам класс £, в любом случае приводит к противоречию.

Выход из сложившейся ситуации Рассел находит в разработанной им простой теории типов. В терминах классов простую теорию типов можно описать следующим образом. Типы образуют иерархическую систему логических элементов, в которой необходимо строго различать классы и то, что их образует. Элементы класса всегда относятся к типу низшему, чем сам класс. Так, если *α, β, γ* относятся к типу *n,* то образованные из них классы *{α}*, *{α, β}*, *{β, γ}*, *{a, β, γ}* и т. д. относятся к типу n+1. Низшим типом логических элементов Рассел считает индивиды, понимаемые как единичные, самостоятельно существующие предметы. Следующий логический тип образуют классы, составленные из индивидов; затем идут классы, образованные из классов, составленных из индивидов, и т. д. Пусть *a, b, c ...* — индивиды, относящиеся к типу 1, тогда классы *{a}, {a, b}, {a, b, c} ...* образуют второй тип, классы *{{a}}, {{a}, {b, c}, {{a}, {b, c}},{a, b, c}}}* — третий тип и т. д. При этом следует отметить, что само понятие индивидов не обязательно специфицировать относительно принимаемой онтологии, оно может быть ограничено лишь тем, что индивиды образуют первый тип в иерархии.

Рассел формулирует следующее ограничение на образование подобных типов: в рамках одного типа нельзя образовывать классы, которые состоят из членов, относящихся к разным типам. С этой точки зрения незаконными образованиями являются конструкции вида *{a, {a}}, {a, {a}, {a, {a}}}* и т. п. Простая теория типов блокирует вышеуказанные парадоксы, рассматривая конструкции, на которых они основаны, как бессмысленные образования*. Но здесь возникают новые проблемы. Если конструкции вида *{a, {a}}, {a, {a}, {a, {a}}}* бессмысленны, тогда можно ли вообще ввести идею бесконечности на чисто логических основаниях?

Типы всё-таки можно образовать. И если есть *n* элементов типа *m*, из них можно образовать классы, относящиеся к типу *m*+1. Так, из класса *{a, β, γ}* типа *m* можно образовать классы типа *m*+1 следующего вида: *{{a}, {β}, {γ}, {a, β}, {a, γ}, {β, γ}, {a, β, γ}}* и т. п., которые будут содержать больше членов, чем исходный класс. И все индуктивные карди-

---

* Заметим, что подобный подход характеризует только теорию типов Рассела и производные от неё теоретико-типовые подходы. Аксиоматическая теория множеств в форме Цермело-Френкеля или фон Неймана принимает подобный способ построения бесконечности в виде аксиомы, предполагая, что построение бесконечности должно зависеть не от способов построения, но от ограничений, до которых эти способы могут дойти. Поэтому введение идеи бесконечности в форме модифицированной аксиомы, основанной на подходе Фреге, дополняется ограничивающими аксиомами на построение множеств. Так, одна из версий аксиомы бесконечности прямо вводит способ построения бесконечности по Фреге, но аксиома об образовании множеств вводит ограничения на образования таких множеств, которые приводят к противоречиям типа Кантора и Рассела.

нальные числа посредством определения через взаимно-однозначное соответствие можно ввести, так как классы, относящиеся к различным типам, можно уравнять. Так, например, во взаимно-однозначном соответствии находятся класс, состоящий из одного элемента, и класс, состоящий из одного этого класса (т. е. класс *{a}* и класс *{{a}}*). Поэтому если есть хоть один элемент, можно получить определение 1 для любого типа*. Отталкиваясь от такого подхода, можно получить определение числа для наибольшего типа и применить его к типам, идущим в иерархии типов ниже. Однако поскольку все такие классы будут конечными, пусть и сколько угодно большими, так как из конечного количества членов можно образовать только конечное количество содержащих их классов, эти классы не дадут бесконечного числа. И их невозможно объединить, чтобы получить N_0, поскольку это противоречит теории типов, т. е. они будут давать только индуктивное кардинальное число. Как утверждает Рассел: «Иерархия типов имеет важные следствия в отношении сложения. Предположим, у нас есть класс из a членов и класс из β членов, где a и β являются кардинальными числами; может случиться так, что их совершенно невозможно объединить, чтобы получить класс, состоящий из членов a и из членов β, поскольку если классы не относятся к одному и тому же типу, их логическая сумма бессмысленна. Только там, где рассматриваемое число классов конечно, мы можем устранить практические следствия этого благодаря тому факту, что мы всегда можем применить к классу, который увеличивает свой тип до любой требуемой степени без изменения своего кардинального числа <...> Следовательно, для любого конечного числа классов различных типов мы можем увеличить все их до типа, который мы можем назвать наименьшим общим множителем всех рассматриваемых типов; и можно показать, что это может быть сделано таким способом, что результирующие классы не будут иметь общих элементов. Затем мы можем образовать логическую сумму всех полученных таким образом классов, и её кардинальное число будет арифметической суммой кардинальных чисел изначальных классов. Но там, где у нас есть бесконечные последовательности классов восходящих типов, этот метод применить нельзя. По этой причине мы не можем доказать, что должны быть бесконечные классы. Ибо предположим, что было бы вообще только n индивидов, где n — конечно. Тогда было бы 2 класса индивидов, 2 класса классов индивидов и т. д. Таким образом, кардинальное число членов каждого типа было бы конечно; и хотя эти

* Следует отметить, что здесь возникает ещё одна предпосылка, утверждающая, что должны быть члены, образующие классы (хотя бы один такой член). Рассел принимает эту предпосылку в форме $\exists x\ (x=x)$, что предполагает существование хотя бы одного элемента, из которого можно образовать класс. Но эта предпосылка составляет особую проблему, связанную с тождеством.

числа превосходили бы любое заданное конечное число, не было бы способа сложить их так, чтобы получить бесконечное число»[*].

Таким образом, получается, что, принимая теорию типов, сугубо с помощью логики дойти до N_0 нельзя, т. е. идею бесконечности чисто аналитически ввести невозможно. На поставленный выше вопрос 1(a) ответ — отрицательный.

Обратимся к вопросу 1(b). Попытку подобного введения идеи бесконечности Рассел находит в диалоге «Парменид» Платона. Аргументация Платона сводится к следующему. Если имеется число 1, то оно имеет бытие. Но бытие и 1 не тождественны. Поэтому бытие и 1 образуют 2. Так как 1 и 2 не тождественны, то они образуют 3, и т. д. *ad infinitum.* Рассел считает это доказательство неверным по двум причинам. Во-первых, потому, что «“бытие” не есть термин, имеющий некоторое определённое значение»[**]. Возможно, это связано с тем, что различать вещь и её бытие имело бы смысл, если бы бытие являлось свойством, выражаемым предикатом. Но для Рассела идея бытия исчерпывается логическим квантором существования, который не обозначает реальное свойство, но указывает на область пробега переменной. И, во-вторых, даже если бы термину ‘бытие’ и удалось придать определённое значение и рассматривать бытие как свойство, то это не имело бы значения для чисел. Связано это с тем, что Рассел считает числа логическими фикциями, и даже не просто фикциями, а, так сказать, фикциями второго порядка. Связано это с принимаемым Расселом определением числа. Как указывалось выше, понятие числа производно от понятия класса, число является классом всех равночисленных классов. Но классы не имеют реального существования. С точки зрения Рассела реальны лишь индивиды, т. е. единичные, самостоятельно существующие или субсистентные вещи. Так, *Сократ* — это индивид, субсистентная вещь, тогда как класс философов не индивид, т. е. не является самостоятельной вещью. Классы задаются как область определения пропозициональной функции, областью значения которой являются истина и ложь. Так, класс философов образуют те индивиды, которые при подстановке на место индивидной переменной в функцию *Философ(x)* дают истину (т. е. *{Сократ, Платон, Аристотель ...}*). Но сам класс *{Сократ, Платон, Аристотель...}* является фикцией.

Второй аргумент подобного вида связан с понятием рефлексивных классов. Рефлексивные классы Рассел определяет как классы, равночисленные некоторым своим подклассам. Свойством рефлек-

---

[*] *Рассел Б.* Математическая логика, основанная на теории типов // Рассел Б. Введение в математическую философию. Новосибирск, 2007. С. 60.

[**] *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Новосибирск, 2007. С. 170.

сивности обладают только классы с бесконечным количеством членов. Действительно, возьмём любой конечный класс с n членами, тогда любой его подкласс, кроме самого этого класса, будет содержать количество членов меньше чем n. Это вытекает из определения понятия индуктивного кардинального числа, поскольку каждый последующий индуктивный кардинал больше предшествующего, а все подклассы класса с заданным индуктивным кардиналом имеют предшествующий индуктивный кардинал. Однако не так дело обстоит с бесконечными классами. Например, согласно доказательству Г. Кантора, класс рациональных чисел равночислен классу натуральных чисел, но класс натуральных чисел является подклассом класса рациональных чисел. Рассел считает рефлексивность отличительным свойством бесконечности. Поэтому если бы удалось доказать существование рефлексивных классов, то тем самым было бы обосновано существование бесконечности.

Попытку обосновать существование рефлексивных классов Рассел находит у Б. Больцано и Р. Дедекинда. Вкратце эта попытка сводится к следующему. Относительно всех объектов можно образовать идеи этих объектов, но сами идеи объектов также являются объектами. Поэтому класс всех объектов является рефлексивным, поскольку идеи его объектов сами же являются его членами. Необоснованность такого введения бесконечности Рассел видит, прежде всего, в смутности самого понятия «идея», и неважно, будет ли она пониматься психологически или в стиле Платона. В любом из этих случаев необходимо приводить дополнительные доказательства, в первом случае эмпирические, что выходит за рамки априорного доказательства, во втором случае необходимо принимать сомнительные спекуляции относительно существования мира объективных идей.

Но даже если принять идеи, то, как считает Рассел, такой способ введения бесконечности не будет логически сообразным. Так, если мы принимаем теорию идей Платона, то должны также принять, что идея либо тождественна тому, идеей чего она является, либо не тождественна, а должна представлять собой его описание через указание некоторых свойств. Но тогда первая альтернатива исключается, поскольку «для доказательства рефлексивности существенным является различие объекта и идеи»*, однако Рассел принимает принцип Лейбница об отождествлении неразличимых (кстати, этот принцип также вызывает ряд затруднений), а вторая альтернатива исключается, поскольку не выполняется принцип взаимно-однозначного соответствия, который важен для установления равночисленности классов. Рефлексивные классы именно равночисленны своим подклассам,

* Там же. С. 172.

но поскольку идей относительно одного и того же объекта может быть много, то взаимно-однозначного соответствия установить нельзя.

Этот же аргумент касается также идей в психологическом смысле. Как утверждает Рассел: «Если “идея” интерпретируется психологически, то тут нужно подчеркнуть, что нет никакой определённой психологической сущности, которая могла бы быть названа единственной идеей объекта: имеется неисчислимое количество вер и установок, каждая из которых может быть названа идеей объекта в том смысле, в котором мы могли бы сказать “моя идея Сократа совершенно отлична от вашей”, но нет никакой центральной сущности (за исключением самого Сократа), которая могла бы связать различные “идеи о Сократе”, и значит, нет никакого одно-однозначного отношения идеи и объекта»*. То есть любые психологические идеи относительно любых объектов многочисленны, и именно поэтому установить взаимно-однозначное соответствие между первыми и вторыми невозможно. А значит, невозможно обосновать идею рефлексивных классов, основанных на понятии взаимно-однозначного соответствия самого класса и некоторых его подклассов..

Таким образом, ответ на вопрос 1(b), если принять точку зрения Рассела, также является отрицательным.

На вопрос 2, т. е. на вопрос о возможности апостериорного обоснования идеи бесконечности с помощью опыта и здравого смысла, лучше всего отрицательно ответить словами самого Рассела: «Можно было бы подумать <...> что эмпирические аргументы, выводимые из пространства и времени, разнообразия цветов и прочего, вполне достаточны для доказательства реального существования бесконечного числа отдельных вещей. Я в это не верю. У нас нет никаких причин верить... в бесконечность пространства и времени, во всяком случае в смысле, в котором пространство и время являются физическими фактами, а не математическими фикциями <...> Теория квантов в физике, является она истинной или ложной, иллюстрирует тот факт, что физика никогда не может привести доказательства непрерывности, хотя вполне возможно, что представит опровержение этому <...> Нет никаких эмпирических причин верить в то, что число вещей в мире бесконечно; но так же нет в настоящее время эмпирических причин полагать, что их число конечно»**. Бесконечность или конечность мира есть предмет веры, а не рационального доказательства, основанного на эмпирических фактах, являющихся основой теоретического обобщения.

Из отрицательного ответа на вопросы 1 и 2 Рассел делает пафосный, но в общем-то правильный, согласно его собственным предпосылкам,

---

* Там же. С. 172.

** Там же.

вывод: «Из того факта, что бесконечное не является самопротиворечивым, но также и не демонстрируемо логически, мы должны заключить, что ничего не может быть известно *a priori* относительно того, является ли мир конечным или бесконечным. Если принять терминологию Лейбница, то по нашему заключению некоторые из возможных миров конечны, некоторые бесконечны, и у нас нет средств узнать, к какому типу относится наш действительный мир. Аксиома бесконечности будет истина в одних возможных мирах и ложна в других, и является ли она истинной или ложной в нашем мире, мы сказать не можем»*. Хотя лучше было бы сказать так: сама по себе идея бесконечности не является самопротиворечивой, к противоречию приводят только попытки априорно доказать необходимость этой идеи. К этому добавим, что раз нельзя *a priori* доказать необходимость этой идеи для действительного мира, то это же самое нельзя доказать и для любого возможного мира.

Таким образом, относительно введения идеи бесконечности в формальную структуру Рассел отвергает логические аргументы, поскольку они приводят к противоречию. Точно так же он отвергает априорные аргументы, основанные на самоочевидности понятий, с помощью которых можно сформулировать эту идею. Идею бесконечности к тому же нельзя ввести и *a posteriori*, поскольку ничто в структуре реальности не свидетельствует о её необходимости. Т. е. попытка ввести идею бесконечности *a priori* несостоятельна, а попытка ввести её *a posteriori* неубедительна. Следовательно, требуется особая аксиома, т. е. аксиома бесконечности. И в структуре рассуждений Рассела аксиома бесконечности занимает особое положение. Поскольку бесконечность нельзя обосновать ни установить взаимнооднозначное соответствие между первыми и вторыми невозможно. А значит, невозможно обосновать идею рефлексивных классов, основанных *a priori*, ни *a posteriori*, необходимо принять нечто вроде гипотетического императива. Т. е. если мы хотим доказать некоторые вещи, то необходимо принять аксиому бесконечности. Для доказательства некоторых пропозиций из «Principia Mathematica» утверждение в виде аксиомы бесконечности нужно принимать в качестве гипотезы. Что же представляет собой эта гипотеза? Здесь мы выходим на третий из указанных выше вопросов: что представляет собой аксиома бесконечности? Принимается ли аксиома бесконечности в силу своего содержания, т. е. именно её содержание служит основанием выводимых из неё следствий, или же основанием служит её форма, согласно которой аксиому бесконечности можно квалифицировать как предложение логики, т. е. предложение, принимаемое просто в силу формы, которую в конечном счёте обнаруживает совокупность

* Там же. С. 173.

предложений, независимо от своего содержания? Т. е. если аксиома бесконечности принимается в силу своего содержания, то она должна что-то предполагать в структуре мира, если же она касается сугубо формы наших рассуждений, то она должна так или иначе иметь логический характер, обнаруживаемый структурой наших рассуждений.

Однако в структуре «Principia Mathematica» все рассуждения об объектах рассматриваются как предположение только для доказательства данного результата, и это предположение при необходимости может быть отброшено, т. е. не рассматриваться как логически необходимое. Так, во всех утверждениях «Principia Mathematica», которые зависят от принятия аксиомы бесконечности, сама эта аксиома рассматривается как гипотеза. В частности, в «Principia Mathematica» об аксиоме бесконечности утверждается: «Это предположение будет приводиться в качестве гипотезы тогда, когда это будет уместно. Ясно, что в логике не найдётся ничего из того, чтобы обосновать его истинность или ложность, и что в нём можно лишь легитимно быть убеждённым или не быть убеждённым, опираясь на эмпирические основания»*. Поэтому для любого результата *T*, доказательство которого требует аксиому бесконечности, в «Principia Mathematica» доказывается не сам результат *T*, а импликация аксиомы бесконечности с *T*. Поэтому аксиома бесконечности имеет содержательный характер вне зависимости от того, как его трактовать (например, если понятие объект трактовать в физическом смысле, то на вопрос об истинности данной аксиомы можно было бы ответить только с помощью данных физики), и, стало быть, все подобные результаты будут выходить за рамки логики. Таким образом, аксиома бесконечности в системе «Principia Mathematica» имеет экстралогический характер, экстралогический в том смысле, что она нечто утверждает о содержании мира, а не относится к структуре рассуждений.

Таким образом, согласно Расселу, получается, что всякое введение бесконечности в структуру наших рассуждений предполагает обращение к содержанию мира, действительного или возможного. И это предполагается не только идеей бесконечности, но и высказыванием, с помощью которого она может быть введена. Так мы получаем ответ на вопрос 3. Утверждение о бесконечности вещей в мире имеет содержательный характер и не может рассматриваться как предложение логики.

Вывод: Ни в одном из поставленных выше вопросов идея бесконечности, согласно Б. Расселу, не является логической. Предложением логики не является и высказывание, посредством которой её можно ввести. Стало быть, бесконечность есть содержательная идея, которую невозможно обосновать *a priori*.

---

* *Уайтхед А. Н., Рассел Б.* Основания математики: в 3 т. Т. 2. Самара, 2006. С. 225.